Aufgabenkatalog Analysis – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Folgen**
Dr. Anton Malevich, Leonard Bechtel, Julian Maas

Aufgabe 1 (2) *Nullfolgen*
Welche der hier aufgeführten Folgen sind rationale Nullfolgen? Beweisen bzw. widerlegen Sie mithilfe der Definition von Nullfolge:

a) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1,2,\dots}$

b) $\left\{\frac{1}{2} - \frac{n^2}{2n+1}\right\}_{n=1,2,\dots}$

c) $\left\{\frac{(n+1)^2}{n^2+1}\right\}_{n=1,2,\dots}$

d) $\left\{\frac{4n+1}{n^4+n}\right\}_{n=1,2,\dots}$

e) $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}_{n=1,2,\dots}$

f) $\left\{\frac{n!}{2^n}\right\}_{n=1,2,\dots}$

g) $\left\{\frac{n^n}{n!}\right\}_{n=1,2,\dots}$

Aufgabe 2 (3) *Die Bernoulli-Ungleichung*

i) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle reellen Zahlen $x \geq -1$ gilt

$$(x+1)^n \geq 1 + nx.$$

ii) Folgern sie nun, dass für $y \in (1, \infty)$ die Folge $\{y^n\}_{n=1,2,\dots}$ gegen ∞ divergiert, d.h. zu jedem $K > 0$ existiert ein $N(K) \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$y^n > K \qquad \text{für alle } n \geq N(K).$$

iii) Folgern sie daraus schließlich, dass für $y \in (0, 1)$ die Folge $\{y^n\}_{n=1,2,\dots}$ eine reelle Nullfolge ist, dass also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ derart existiert, dass

$$|y^n| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon).$$

Aufgabe 3 (3) *Sandwich-Lemma*
Es seien $\{x_n\}_{n=1,2,\dots} \subset \mathbb{R}$ und $\{y_n\}_{n=1,2,\dots} \subset \mathbb{R}$ konvergente reelle Zahlenfolgen mit:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \qquad y = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

i) Gilt $x_n \leq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $x \leq y$.

ii) Zeigen Sie durch die Auswahl geeigneter Folgen, dass die analoge Aussage mit "$<$" anstelle von "$\leq$" allgemein nicht gilt.

iii) Ist $\{z_n\}_{n=1,2,\dots} \subset \mathbb{R}$ eine Folge (von der man zunächst nicht weiß, dass sie konvergiert) mit $x_n \leq z_n \leq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und gilt $x = y$, so konvergiert $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ gegen x.

iv) Verwenden Sie iii) um folgende Aussage zu beweisen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log\left(e \cdot n^n\right)} = 0.$$

Aufgabe 4 (1) *Grenzwerte von Folgen I*
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2+5n+n\sqrt{n}}{3n^2-2n-1}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\cdot 3^n+4}{3^{n+1}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2}{n+2^{-n}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n!}{3^n-n!}$ (*Hinweis:* Beweisen Sie zuerst, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{n!} = 0$ ist).

Aufgabe 5 (2) *Grenzwerte von Folgen II*
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n}{3n^2+5}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+3n^2}{3n^4+4}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n\sqrt{n}+7n+5}{3n^2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n\sqrt{n^2+1}}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2^n}{n^2-2^n}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n-2^{-n}}{2^n-1}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{3n}-1}{2^{3n}-3^{2n}}$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!+3n^9-7}{n^n+3n^9+7}$

Aufgabe 6 (2) *Grenzwerte von Folgen III*
Entscheiden Sie, ob die folgenden Zahlenfolgen konvergieren oder divergieren und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert:

a) $\left\{\dfrac{1}{n^k}\right\}_{n=1,2,\ldots}$ mit $k \in \mathbb{N}$

b) $\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right\}_{n=1,2,\ldots}$

c) $\left\{a^{-n}n^k\right\}_{n=1,2,\ldots}$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $a > 1$

d) $\left\{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\ldots+\dfrac{n}{n^2}\right\}_{n=1,2,\ldots}$

e) $\left\{\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)\right\}_{n=1,2,\ldots}$

f) $\left\{\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right\}_{n=1,2,\ldots}$

Aufgabe 7 (3) *Summen/Produkte von rationalen CF sind rationale CF*
Es seien $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$ *und* $\{y_n\}_{n=1,2,\ldots}$ rationale Cauchyfolgen. Beweisen Sie, dass dann auch

$$\{x_n+y_n\}_{n=1,2,\ldots} \qquad \text{und} \qquad \{x_n\cdot y_n\}_{n=1,2,\ldots}$$

rationale Cauchyfolgen sind.

Aufgabe 8 (3) *Unvollständigkeit von $\mathbb{Q}$*

i) Zeigen Sie, dass in $\mathbb{Q}$ jede konvergente Folge eine Cauchyfolge ist.

ii) Zeichen Sie nun durch Auswahl eines geeigneten Gegenbeispiels, dass die Umkehrung dieser Aussage in $\mathbb{Q}$ allgemein nicht gilt.

Anmerkung: Mengen, auf denen diese Äquivalenz gilt, nennt man *vollständig.*

Aufgabe 9 (3) *Definition reeller Zahlen*
Die reellen Zahlen werden (wie die in ihnen enthaltenen Zahlmengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$) als Äquivalenzklassen definiert. Der Unterschied hier ist jedoch, dass dazu nicht zwei Zahlen miteinander in Relation gesetzt werden, sondern zwei Zahlen*folgen.*
Konkret definiert man: Zwei rationale Cauchyfolgen $\{x_n\}_{n=1,2,...}$ und $\{y_n\}_{n=1,2,...}$ heißen zueinander äquivalent, i.Z.

$$\{x_n\}_{n=1,2,...} \sim_{\mathbb{R}} \{y_n\}_{n=1,2,...}$$

wenn die Differenzfolge

$$\{x_n - y_n\}_{n=1,2,...}$$

eine rationale Nullfolge bildet.

Weisen Sie nach, dass $\sim_{\mathbb{R}}$ eine Äquivalenzrelation darstellt.

(Dies rechtfertigt die Definition der reellen Zahlen als Äquivalenzklassen von $\sim_{\mathbb{R}}$.)

Aufgabe 10 (1) *Bestimmen von Teilfolgen*
Betrachten Sie die Zahlenfolge

$$\{x_n\}_{n=1,2,...} \subset \mathbb{R} \text{ mit } x_n := \frac{3n}{(-2)^n}.$$

i) Beweisen Sie, dass $\{x_n\}_{n=1,2,...}$ eine Nullfolge ist.

ii) Bestimmen Sie eine streng monoton fallende und eine streng monoton wachsende Teilfolge.

Aufgabe 11 (1) *Häufungsstellen von Zahlenfolgen I*
Bestimmen Sie alle Häufungsstellen der Zahlenfolgen $\{a_n\}_{n=1,2,...}$ mit

$$a_n = \begin{cases} 2 - \dfrac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} n - n, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Geben Sie dazu explizit konvergente Teilfolgen an.

Aufgabe 12 (2) *Häufungsstellen von Zahlenfolgen II*
Bestimmen Sie alle Häufungsstellen der folgenden Zahlenfolgen

i) $\{a_n\}_{n=1,2,...} \subset \mathbb{R}$ mit $a_n := (-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}$

ii) $\{b_n\}_{n=1,2,...} \subset \mathbb{R}$ mit $b_n := (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$

iii) $\{c_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \mathbb{R}$ mit $c_n := (-1)^{n+1}\dfrac{6n^2+17n}{5n^3+7}$

iv) $\{d_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \mathbb{R}$ mit $d_n := \left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n$

Aufgabe 13 (1) *Monotone Zahlenfolgen I*
Zeigen Sie mithilfe des Monotoniesatzes, dass die Folge $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ mit

$$a_n := \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

konvergiert.

Aufgabe 14 (2) *Die Leiden des jungen Studierenden*
Ein Student lernt pro Tag drei Seiten des Analysisskriptes auswendig. Über Nacht vergisst er 1% des insgesamt gelernten Wissens.
Gehen Sie davon aus, dass das Skript unendlich viele Seiten hat und die Testperson am ersten Semestertag über kein Wissen aus der Analysis verfügt. (Nocht nicht einmal die pq-Formel!)

i) Leiten Sie eine (rekursive) Formel für den Wissensinhalt w_n (gemessen in Seiten) der Testperson nach Ablauf von n Tagen und Nächten her.

ii) Zeigen Sie, dass die Folge $\{w_n\}_{n=1,2,\dots}$ monoton steigt.

iii) Zeigen Sie, dass die Folge $\{w_n\}_{n=1,2,\dots}$ nach oben beschränkt ist. (Überleg Sie sich dazu, ab wie viel Tagen die Testperson mehr Seiten vergisst, als sie am nächsten Tag neu lernt.)

iv) Angenommen, die Testperson hätte eine (wortwörtliche) Ewigkeit studiert. Welche Wissensmenge wird sie erreicht haben? (Grenzwert)

Aufgabe 15 (2) *Frosch und Kröte*
Ein Frosch und eine Kröte sind in einen 50 Meter tiefen Brunnen gefallen. Jeden Tag klettert der Frosch 32 Meter hoch, und ruht sich über Nacht aus. Während der Nacht rutscht er $\frac{2}{3}$ seiner Höhe (vom Boden) hinab. Die Kröte klettert täglich 13 Meter vorm Ausruhen. Nachtsüber rutscht sie $\frac{1}{4}$ ihrer Höhe (vom Boden) hinab.
Bestimmen Sie, wer von den beiden entkommt und jeweils nach wie viel Tagen die Flucht gelungen ist.

Aufgabe 16 (3) *Monotone Zahlenfolgen II*
Für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ sei die Zahlenfolge $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$ folgendermaßen rekursiv definiert

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$$

für $0 < x_1 < \frac{1}{a}$ beliebig.

i) Zeigen Sie, dass $x_{n+1} \leq \frac{1}{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

ii) Zeigen Sie, dass außerdem $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

iii) Begründen Sie, dass $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$ konvergiert und bestimmen sie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Aufgabe 17 (3) *Monotone Zahlenfolgen III*
Gegeben sei die rekursiv definierte Folge $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ mit

$$a_1 = b, \qquad a_{n+1} := \frac{|a_n|}{2a_n - 1}.$$

i) Unter der Annahme der Konvergenz, gegen welche Grenzwerte kann die Folge dann konvergieren?

Wir wählen nun als mögliche Startwerte $b = \frac{1}{4}$ und $b = -\frac{1}{4}$.

ii) Für welchen der beiden Startwerte ist die Folge monoton?

iii) Für welchen der beiden Startwerte ist die Folge beschränkt?

iv) Begründen Sie, ob die Folgen für die genannten Anfangswerte konvergieren und bestimmen Sie ggf. die Grenzwerte.

Aufgabe 18 (1) *Infimum und Supremum I*
Bestimmen Sie das Supremum und das Infimum der Menge

$$M = \{5 + \frac{2}{n} | n \in \mathbb{N}\}$$

auf direktem Weg mithilfe der Definitionen der Begriffe.
Sind diese Werte auch Maxima bzw. Minima?

Aufgabe 19 (2) *Infimum und Supremum II*
Bestimmen Sie, ob die folgenden Mengen beschränkt sind und geben Sie gegebenenfalls Infimum und Supremum an. Handelt es sisch sogar um ein Minimum bzw. Maximum?

i) $A := \left\{ \frac{2n+3}{3-4n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

ii) $B := \left\{ \frac{m+n}{m \cdots n} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$

iii) $C := \left\{ \frac{1}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

iv) $D := \left\{ \frac{|x|}{1+|x|} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

v) $E := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 < x + 2 \right\}$

vi) $F := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 10x \leq 24\}$

Aufgabe 20 (2) *Beispiele Infimum/Supremum*
Geben Sie (ohne Beweis)

i) eine abzählbare Menge $C \subset \mathbb{R}$

ii) eine überabzählbare Menge $C \subset \mathbb{R}$

an, jeweils mit den vier Eigenschaften

$$0 \in C, \qquad 1 \notin C, \qquad \inf C = 0, \qquad \sup C = 1$$

Aufgabe 21 (1) *Limes Inferior/Superior I*
Ermitteln Sie Limes inferior und Limes superior der folgenden Zahlenfolgen

i) $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}_{n=1,2,\ldots}$

ii) $\left\{ \frac{n}{2} \right\}_{n=1,2,\ldots}$

iii) $\left\{ \frac{1}{n} + [1 + (-1)^n] \cdot n \right\}_{n=1,2,\ldots}$

Aufgabe 22 (2) *Limes Inferior/Superior II*
Bestimmen Sie jeweils für die folgenden Folgen alle Häufungsstellen und geben Sie (soweit vorhanden) den Limes superior und den Limes inferior an.

i) $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ für $a_n := \frac{1}{n^3} + (-1)^n \cdot \frac{n(n+1)}{n^2+5}$

ii) $\{b_n\}_{n=1,2,\ldots}$ für $b_n := 2 \cdots (-1)^n + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

iii) $\{c_n\}_{n=1,2,\dots}$ für $c_n := \dfrac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-1)^n}$

iv) $\{d_n\}_{n=1,2,\dots} = \{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, \dots\}$

Aufgabe 23 (3) *Zusammenhang Konvergenz einer Folge und ihrer Teilfolgen*
Beweisen Sie: Eine Folge $\{a_n\}_{n=1,2,\dots} \subset \mathbb{R}$ ist genau dann konvergent, wenn gilt

$$-\infty < \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n < \infty$$

Aufgabe 24 (4) *Charakterisierung konvergenter Folgen*
Es seien $\{x_n\}_{n=1,2,\dots} \subset \mathbb{R}$ eine reelle Zahlenfolge und $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) Die Folge $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$ konvergiert gegen x.

ii) Jede Teilfolge von $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$ konvergiert gegen x.

iii) Jede Teilfolge von $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$ hat eine gegen x konvergente Teilfolge.

iv) Die einzige Häufungsstelle von $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$ ist x.

v) Es gilt $\liminf_{n\to\infty} x_n = x = \limsup_{n\to\infty} x_n$.

Aufgabe 25 (1) *Regel von L'Hospital I*
Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$

ii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{1-x}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x}$

iv) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{e^x}$

v) $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-x}$

vi) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\ln(x)}$

Aufgabe 26 (2) *Regel von L'Hospital II*
Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)$

ii) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{\cot(x)}$

iii) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan(3x)}{\tan(x)}$

iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin(x)} - \cos^2(x)}{\sin(2x)}$

v) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(\sin(x))}{\ln(\sin(2x))}$

vi) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(\ln(x))}{x^{\frac{1}{3}}}$